TD 10 : Primitives, intégrales

Techniques d'intégration

1 ★☆ (*En passant par une primitive*) En déterminant une primitive, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 xe^{-3x^2}dx$
2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$
3) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$
4) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2x+3}{x-1}dx$
5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$
6) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$

2 ★☆ (*Intégration par parties*) Calculer les intégrales suivantes par une IPP :

$$\mathcal{I}_1=\int_0^1 \arctan x\,dx \qquad \mathcal{I}_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(4x)\,dx$$

$$\mathcal{I}_3=\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx \qquad \mathcal{I}_4=\int_0^{\ln 2} (3x+1)^2e^{-4x}\,dx$$

3 ★☆ (*Changement de variables*) En utilisant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

- $\displaystyle\mathcal{I}_1=\int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ en posant $u=\sqrt{x}$
- $\displaystyle\mathcal{I}_2=\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$ en posant $z=\sqrt{x-2}$
- $\displaystyle\mathcal{I}_3=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$ en posant $t=\tan u$
- $\displaystyle\mathcal{I}_4=\int_0^{\frac{e-e^{-1}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ en posant $x=\operatorname{sh} t$
- $\displaystyle\mathcal{I}_5=\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$ à vous de trouver
- $\displaystyle\mathcal{I}_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$ à vous de trouver

4 ★☆ (*Intégrales de fractions rationnelles*) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{x^2-4x+4}dx$
2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2}$
3) $\displaystyle\int_6^8 \frac{dt}{t^2-4t-5}$
4) $\displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}} \frac{dx}{8x^2+50}$

5 ★☆ (*Équations et intégrales*)

1) On pose $\mathcal{I}=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin x\operatorname{sh} x\,dx$. Faire deux intégrations par parties pour obtenir une équation sur $\mathcal{I}$. Calculer $\mathcal{I}$.
2) Pour tout $x>1$, on pose $\mathcal{I}(x)=\displaystyle\int_1^x \sin(\ln t)\,dt$. Par la même méthode, calculer $\mathcal{I}(x)$. En déduire une primitive de $t\mapsto\sin(\ln t)$ sur $]1,+\infty[$.

Primitives

6 ★★ (*Trouver une primitive*) Déterminer, sur un intervalle approprié, une primitive des fonctions suivantes. On pourra notamment passer par l'écriture $\displaystyle\int^x f(t)dt$ et éventuellement faire des changements de variables du type $u=\varphi(t)$.

1) $x\mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$
2) $x\mapsto x\sqrt{1+x^2}$
3) $x\mapsto \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$
4) $x\mapsto \cos x\sin^3 x$
5) $x\mapsto \dfrac{\sin(2x)}{\cos^3(2x)}$
6) $x\mapsto \dfrac{\ln x}{4x}$
7) $x\mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$
8) $x\mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
9) $x\mapsto \sin(2x)\cos^2 x$
10) $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}\ln(1-x^2)$

7 ★★ (*Trouver toutes les primitives*) Déterminer *toutes* les primitives des fonctions suivantes :

1) $f : x\mapsto \sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$
2) $g : x\mapsto \dfrac{1}{|x|}$ sur $\mathbb{R}^*$
3) $h : x\mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$

Règles de Bioche

8 ★★☆ (*Règles de Bioche*) En utilisant les règles de Bioche, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}dt$

3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin^2 x}dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}dx$

9 ★★ En posant $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x - \cos x + \sqrt{2}}$

À vous de jouer

10 ★★ (*Calcul d'intégrales*) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{1-x^2}dx$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i\theta}d\theta$

3) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x \cos^5 x\,dx$

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$

6) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^3 x\,dx$

8) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ix}\sin x\,dx$

9) $\displaystyle\int_1^8 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$

10) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^8 x \tan x\,dx$

11) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$

11 ★★☆ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Calculer

$$\int_a^b \frac{dt}{t-\alpha}$$

12 ★★☆ (*Intégrales de Wallis*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$$

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
3) En déduire la valeur de I_n.

13 ★★★ Montrer que :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx = \frac{\pi}{4}$$

En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$.